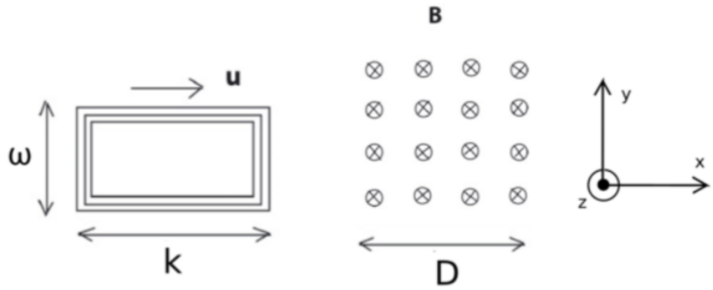
Série 13

Exercice 1: Auto-inductance

On reprend l'exercice 4 de la semaine précédente ("Induction et force de Lorentz") avec une bobine de résistance R, constituée de $N = nl$ (l est la hauteur de la bobine, n est le nombre de tours par unité de hauteur de la bobine) spires rectangulaires de longueur k et de largeur w. Maintenant, on prend en compte l'auto-inductance de la bobine qui sera assimilée à une bobine idéale. On supposera que la bobine se déplace à une vitesse u constante le long de l'axe x.



(a) Pendant la période durant laquelle la bobine entre dans la zone soumise au champ B mais n'est pas encore entièrement dedans, exprimez le flux du champ <u>total</u> (le champ B extérieur plus celui produit par le courant I dans la bobine) à travers la bobine en fonction du courant I et de la distance x parcourue par la bobine à l'intérieur de la zone avec le champ magnétique.

(b) À partir du résultat de la partie a), montrez qu'en présence d'une variation du flux totale, la bobine est équivalente à un circuit fermé composé d'une résistance R, d'une inductance $L = \mu_0 n^2 l \omega k$ et d'une fem ε. Déterminez $I(t)$ pour l'intervalle de temps où la bobine entre dans la zone soumise au champ magnétique B uniforme.

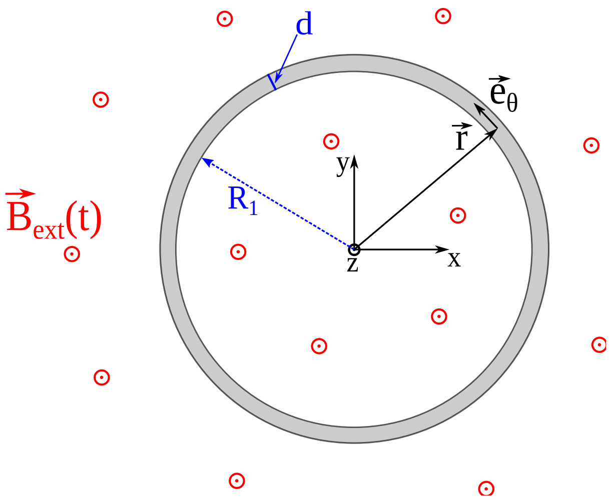
(c) Déterminez la dépendance temporelle du courant $I(t)$ pour l'intervalle de temps où la bobine est entièrement dans la zone soumise au champ magnétique B uniforme (avant qu'elle ne commence à sortir par le côté droit).

Exercice 2: Courant induit dans une canette (Examen 2019)

On considère un cylindre creux de diamètre interne R_1 et de longueur $l \gg R_1$, orienté le long de l'axe z, voir la figure ci-dessous. L'épaisseur d des parois du cylindre est très mince, $d \ll R_1$. Le cylindre, constitué d'un matériau conducteur de conductivité électrique σ, est plongé dans un champ magnétique externe $\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t)$, uniforme dans l'espace, donné par

$$\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \vec{0} \qquad \text{pour } t < 0$$
$$\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \alpha t\, \vec{e}_z \qquad \text{pour } t \geq 0$$

où $\alpha > 0$ est une constante



(a) Pour $t > 0$, trouvez la valeur de la tension induite et la direction du courant induit dans le cylindre par le champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$. Justifiez votre réponse. Négligez ici l'auto-inductance du cylindre, c'est à dire l'effet du champ magnétique généré par le courant induit.

(b) Dans le cas a), pour $t > 0$, donnez l'expression du courant induit $I(t)$ en fonction de σ, α et des paramètres géométriques de la canette. Quelle est la valeur de $I(t)$ dans la limite $\sigma \to \infty$?

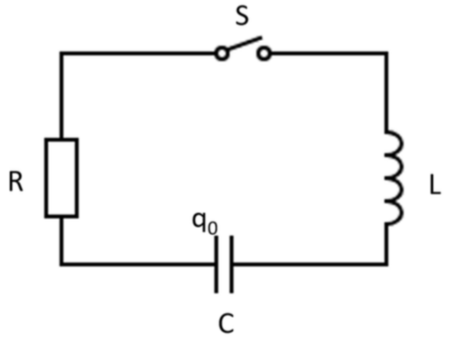
(c) On suppose maintenant que l'on peut écrire la densité de courant dans la paroi du cylindre comme $\vec{j} = -j_0 \vec{e}_\theta$. Utilisez la loi d'Ampère pour déterminer, à l'intérieur du cylindre ($r < R_1$), la norme et la direction du champ magnétique $\vec{B}_c$ généré par $\vec{j}$, en exprimant la norme de $\vec{B}_c$ en fonction de j_0, puis également en fonction du courant I.
Indication : vous pouvez supposer que le champ magnétique $\vec{B}_c$ est nul à l'extérieur du cylindre ($r > R_1 + d$) et que $l \gg R_1$.

(d) Déterminez l'expression du courant $I(t)$ en prenant en compte les effets d'auto-induction du cylindre et en supposant que $I(t = 0) = 0$.

(e) En utilisant les résultats des parties c) et d), déterminez le champ magnétique total à l'intérieur du cylindre ($r < R_1$) pour un temps $t = t_0 > 0$, et trouvez sa valeur pour les cas limites $\sigma \to 0$ et $\sigma \to \infty$.
Indication : vous pouvez utiliser le développement limité $e^x \approx 1 + x$ pour une quantité $x \ll 1$.

Exercice 3: Circuit électrique oscillant - Principe de la bobine de Tesla (Examen 2020)

On considère le circuit montré dans la figure ci-dessous, composé d'un condensateur de capacité C, d'une bobine avec auto-inductance L, et d'une résistance de valeur R. L'auto-inductance du reste du circuit (à part celle de la bobine déjà tenue en compte) est négligeable. La situation initiale est telle que l'interrupteur S est ouvert et que le condensateur porte la charge $+q_0$.



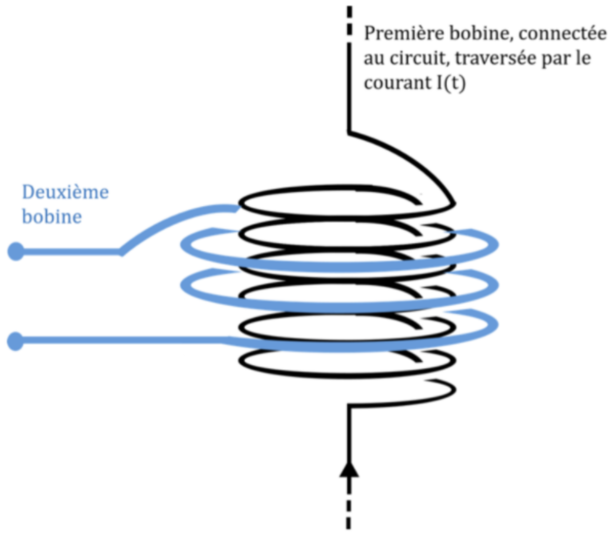
(a) À $t = 0$, on ferme l'interrupteur S. Démontrez que l'équation différentielle régissant l'évolution du courant est donnée par

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{3}$$

(b) On a que $I(t = 0) = 0$. Montrez que la deuxième condition initiale pour le courant est $\frac{dI}{dt}(t = 0) = +\frac{q_0}{LC}$ si vous avez défini la direction positive du courant dans la direction de l'aiguille de montre, ou $\frac{dI}{dt}(t = 0) = -\frac{q_0}{LC}$ dans le cas contraire.

(c) Avec les résultats des parties a) et b), déterminez $I(t)$ dans la limite $\frac{L}{C} > \frac{1}{4}R^2$.

On ajoute maintenant une deuxième bobine, entourant la première comme indiqué sur la figure ci-dessous. La première bobine reste connectée au circuit comme avant. Les bornes de la deuxième bobine sont ouvertes, tel qu'aucun courant ne peut circuler dans cette bobine. La longueur l_1, la section S_1, et le nombre de spires N_1 de la première bobine sont connus. Même chose pour la deuxième bobine (l_2, S_2, N_2). Les deux bobines peuvent être considérées comme des bobines idéales.



(d) Exprimez la valeur absolue de la tension induite dans la deuxième bobine en fonction du courant $I(t)$ dans la première bobine et d'autres quantités données.

(e) Trouvez la valeur absolue du rapport entre la tension induite dans la deuxième bobine et la tension entre les bornes de la première bobine. Pour simplifier l'expression finale, exprimez l'auto-inductance de la première bobine en fonction du nombre de spires et de ses dimensions.

(f) En utilisant le résultat pour $I(t)$ trouvé dans la partie c) et en supposant maintenant que $R = 0$, donnez l'expression de la tension maximale induite dans la deuxième bobine en fonction de la capacité et de la charge initiale q_0 du condensateur.

Exercice 4: Onde électromagnétique (Examen 2019)

(a) Dérivez l'équation d'onde pour le champ magnétique $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell dans le vide (densité de charge $\rho_{el} = 0$, densité de courant $\vec{j} = 0$).
Rappel : Pour un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$, on a l'identité suivante :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

(b) Les ondes électromagnétiques visibles ont une longueur d'onde entre $\lambda_1 = 380\ \mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 750\ \mathrm{nm}$ ($1\ \mathrm{nm} = 10^{-9}\ \mathrm{m}$). Trouvez les fréquences ν_1 et ν_2 associées à ces ondes dans le vide. La vitesse de la lumière est $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$

(c) On considère des ondes sonores de mêmes longueurs d'onde (entre $\lambda_1 = 380\ \mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 750\ \mathrm{nm}$). Trouvez les fréquences ν_1 et ν_2 associées à ces ondes à 20°C. Ces ondes sont-elles audibles pour un être humain ? L'indice adiabatique γ de l'air est $7/5$, la masse moyenne des molécules dans l'air est $m = 29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ et la constante de Boltzmann est $1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$. Les fréquences audibles pour un être humain s'étendent typiquement de $16\ \mathrm{Hz}$ à $16\ \mathrm{kHz}$.

Exercice 5: Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique

Considérons une onde électromagnétique qui se propage dans le vide vers un matériau diélectrique uniforme et isotrope, avec un indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon_r} > 1$. L'incidence de l'onde est perpendiculaire à l'interface entre vide et matériau. On s'attend à ce qu'une partie de l'onde soit transmise et une partie réfléchie. Pour le champ $\vec{E}$ associé à l'onde, on fait l'ansatz :

— Pour $z < 0$:

$$\widetilde{\vec{E}}(z < 0, t) = \widetilde{\vec{E}_I}(z,t) + \widetilde{\vec{E}_R}(z,t)$$

avec

$$\widetilde{\vec{E}_I}(z,t) = E_{XI}\ e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)}\vec{e}_x$$

et

$$\widetilde{\vec{E}_R}(z,t) = E_{XR}\ e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)}\vec{e}_x$$

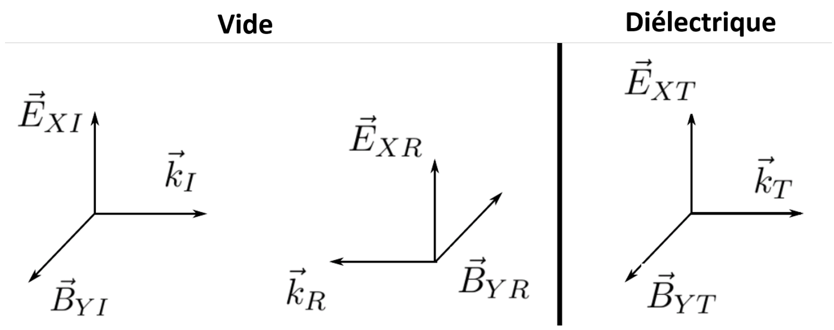
— Pour $z > 0$:

$$\widetilde{\vec{E}}(z > 0, t) = \widetilde{\vec{E}_T}(z,t)$$

avec

$$\widetilde{\vec{E}_T}(z,t) = E_{XT}\ e^{i(\omega t - k_T z + \varphi_T)}\vec{e}_x$$

E_{XI}, E_{XR} et E_{XT} sont tous $\in \mathbb{R}$ et positifs.



(a) On suppose que ω, k_I, k_R et k_T sont tous positifs. Exprimez k_I, k_R et k_T en fonction de ω. *Indication : dans un matériau avec indice de réfraction n, la vitesse de la lumière est c/n, avec c la vitesse de la lumière dans le vide.*

(b) Complétez l'ansatz pour $\vec{E}$ par la composante du champ magnétique. Utilisez la relation

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}}{\omega}$$

qui suit de la Loi de Faraday est qui est valable dans le vide comme dans le matériau. Pourquoi sur la figure avons-nous représenté $\vec{B}_{YR}$ opposé à $\vec{B}_{YI}$?

(c) On peut montrer qu'à l'interface vide-diélectrique, les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles à l'interface sont continues[1]. Utilisez ces conditions pour exprimer E_{XR}, φ_R, E_{XT} et φ_T en fonction de E_{XI} et φ_I.

(d) Comme application numérique de la partie c), on prend l'interface air-eau. On a $n_{air} = \sqrt{\varepsilon_{r,air}} \approx \sqrt{1.0006} \approx 1 \approx$ cas du vide, et $n_{eau} = \sqrt{\varepsilon_{r,eau}} \approx \sqrt{1.7} = 1.3$ (valable pour les longueurs d'onde dans le visible). Quelle est votre conclusion ?

1. Pour $\vec{E}$, ceci est une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday, pour $\vec{B}$ c'est une conséquence de l'équation de Maxwell-Ampère et du fait qu'il n'y a pas de courants de surface dans un diélectrique.